Trinômes

1 Définition

Définition 1.1 *On appelle fonction polynôme du second degré ou trinôme une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ *où a, b et c sont des nombres donnés avec $a \neq 0$.*

Exemple 1.2 Identifier les coefficients a, b et c pour chaque trinôme éventuel.

1. $x^2 + 4x - 5$
2. $5x + 7$
3. $-2x^2 + 3$
4. $3(x-2)(x-3)$
5. $-x^3 + 6x^2 + 8$

Exercice 1 Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x-2}$ est un trinôme.

2 Forme canonique

Théorème 2.1 *Tout trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire sous la forme :*

$$\boxed{f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})}$$

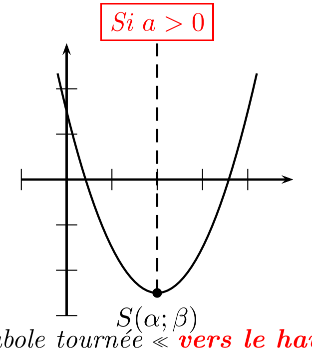
Cette écriture s'appelle la forme ***canonique*** *de $f(x)$. Voir preuve p 24.*
On peut aussi l'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

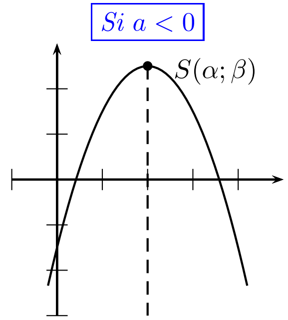
Remarque *Cette écriture permet de pouvoir factoriser le trinôme afin de résoudre des équations et inéquations du 2nd degré.*

Exercice 2 Déterminer la forme canonique de f définie par $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$.
Solution : On obtient $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$.

Théorème 2.2 *Dans un repère orthonormé, la courbe de f est une* ***parabole*** *de sommet $S(\alpha;\beta)$. Elle admet un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.*



*Parabole tournée « **vers le haut** ».*



Parabole tournée « vers le bas ».

Exercice 3 Déterminer le tableau de variation des trinômes suivant :

1. $f(x) = x^2 + 4x - 5$
2. $g(x) = -2x^2 + 7x - 3$

3 Discriminant

Définition 3.1 *On appelle discriminant d'un trinôme le réel Δ définie par*

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

.

Exemple 3.2 Calculer le discriminant si possible dans chaque cas :

1. $x^2 + 5x - 3$
2. $-x^2 + 7$
3. $-2x^2 + 5x$
4. $(x+1)(x-3)$
5. $-x^3 + 6x^2 + 8$

Remarque *Le mot discriminant veut dire* ***différencier les cas*** *içi au niveau de la résolution d'équation du second degré.*

4 Equation du second degré

Définition 4.1 *Une équation du second degré est de la forme*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

où a, b et c sont des nombres donnés avec $a \neq 0$.

Théorème 4.2 *(**Résolution de** $ax^2 + bx + c = 0$)*

3 cas se présentent suivant le signe de Δ

- *Si* $\Delta < 0$*, l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *n'admet aucune solution réelle.*
- *Si* $\Delta > 0$*, l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes :*

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- *Si* $\Delta = 0$*, l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *admet une unique solution réelle :*

$$\boxed{x_1 = \frac{-b}{2a}}$$

Remarque *La preuve réside du fait que :*
$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$ *or* $\Delta = b^2 - 4ac$
donc $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$. *Suivant le signe de* Δ*, on peut factoriser l'expression en reconnaissant la forme* $A^2 - B^2$.

Remarque
Les solutions de l'équation sont aussi appelées $\boxed{\textbf{racine}}$ *du trinôme* $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4.3 Retour à l'activité du drapeau danois.
Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + 3 = 0$.
On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1 \quad b = -5 \quad c = 3$. On calcule $\Delta = b^2 - 4 * a * c = (-5)^2 - 4 * 1 * (3) = 13$.
L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes car $\Delta > 0$. En utilisant la formules du cours, $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x = \frac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 * 1}$ ou $x = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 * 1}$.

on a alors : $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$
On retrouve bien les solutions de l'activité 1 du cours.

Remarque *L'utilisation de la formule n'est pas systématique !*

Exemple 4.4 Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $x^2 - 4 = 0$.

On a directement : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad$ *ou* $\quad x = -2$
On en déduit que les racines de $x^2 - 4$ sont -2 et 2.

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$
2. $-x^2 + x - 8 = 0$
3. $2x^2 + 16x + 32$
4. $-3x^2 + 15 = 0$
5. $4x^2 + 100 = 0$

Exercice 5 (**Réduction au même dénominateur**)

Résoudre l'équation suivante : $2 - \frac{5}{x+2} = \frac{2}{x-1}$

Exercice 6 (**Equation avec paramètre**)

On considère l'équation E suivante : $x^2 - 2mx + 4 + m = 0$.
Déterminer le ou les paramètres m tel que l'équation E admet une unique solution.

Exercice 7 (**Position relative**)
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 4x$ et $g(x) = x^2 - 2x + 2$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersections des courbes de f et de g s'ils existent.

Exercice 8 (**Equation bi-carré**)
Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Exercice 9 (**Mise en équation**)
Un rectangle a un périmètre de 48 mètres et une aire de 135 m^2. Donner les mesures de ses cotés.

5 Inéquation du second degré

Théorème 5.1 ***(Signe de** $ax^2 + bx + c$*)*
3 cas se présentent suivant les racines du trinôme donc selon le signe de Δ.

— *Si $\Delta < 0$, le signe $ax^2 + bx + c$ est celui du signe de a.*

On a donc la règle suivante :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe* a

— *Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise selon :*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

avec x_1 et x_2 étant les racines du trinôme.

On a donc la règle suivante (si $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2$		*signe* a	0	*signe de -a*	0	*signe* a	

— *Si $\Delta = 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise selon :*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

avec x_1 l'unique racine du trinôme.

On a donc la règle suivante :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$a(x - x_1)^2$		*signe* a	0	*signe* a	

Remarque *La preuve provient encore de la forme canonique.*
La mémorisation de ses résultats est facilitée en pensant à la position de la parabole représentative de T par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 5.2 (**Factorisation**)
Factoriser si possible $3x^2 - 21x + 36$.

Les racines de $3x^2 - 21x + 36$ sont 3 et 4.
Donc $3x^2 - 21x + 36 = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 3)(x - 4)$

Remarque *L'intérêt de factoriser permet de simplifier des expressions.*

Exercice 10
Simplifier $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$.

Exemple 5.3 (**Signe**)
Dresser le tableau de signe de $3x^2 - 21x + 36$.

Les racines de $3x^2 - 21x + 36$ sont 3 et 4. Or $a = 3$ donc $a > 0$.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$3x^2 - 21x + 36$		+	0	-	0	+	

Exercice 11 Déterminer le signe des trinômes suivant :

1. $x^2 + 5x - 50$
2. $2x^2 + 16x + 32$
3. $-3x^2 - 3x - 15$
4. $4x^2 + 100$

Exercice 12 (**Résolution d'inéquation**)
Résoudre l'inéquation suivante : $x^2 - 2x - 8 > 0$

Exercice 13 (**Position relative**)
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 40$ et $g(x) = x^2 - 5x - 10$.

Déterminer la position relative des courbes de f et de g.

Exercice 14 (**Application économique**)
En désignant par x la quantité récolté annuelle en millions de tonnes, la recette est donnée, en millions d'euros, par $R(x) = -0,5x^2 + 10x$ et les charges par $C(x) = x + 28$. Le producteur est-il toujours bénéficiaire ? Existe-t-il un bénéfice maximal ? Si oui, quelle quantité doit produire l'exploitant pour atteindre ce bénéfice maximal ?